

Teorema di Weierstrass

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

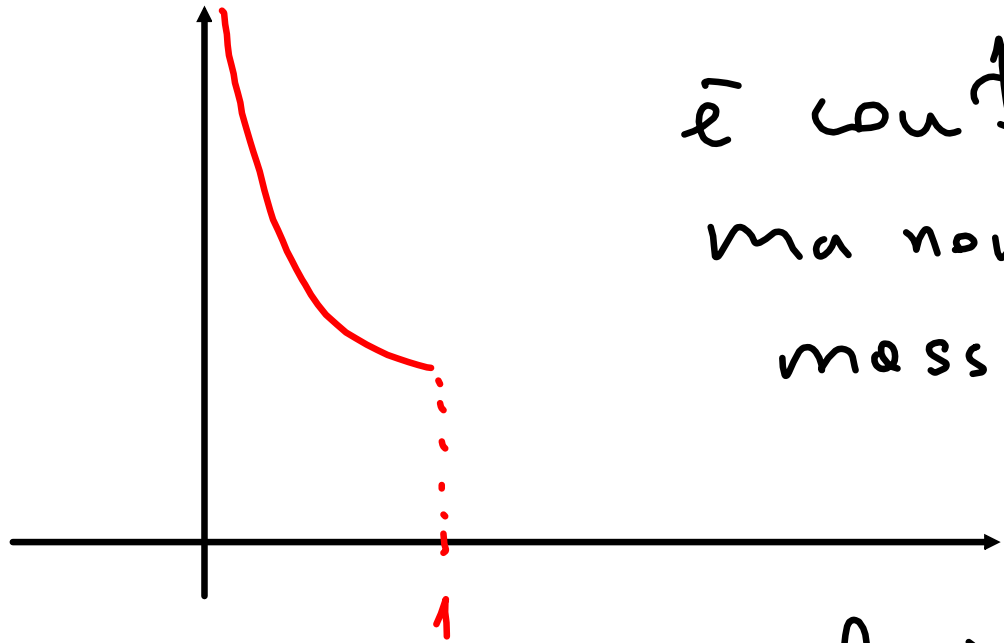
Allora f ha massimo e
minimo.

$a, b \in \mathbb{R}$

limitato e
chiuso.

$a, b \neq \pm \infty$.

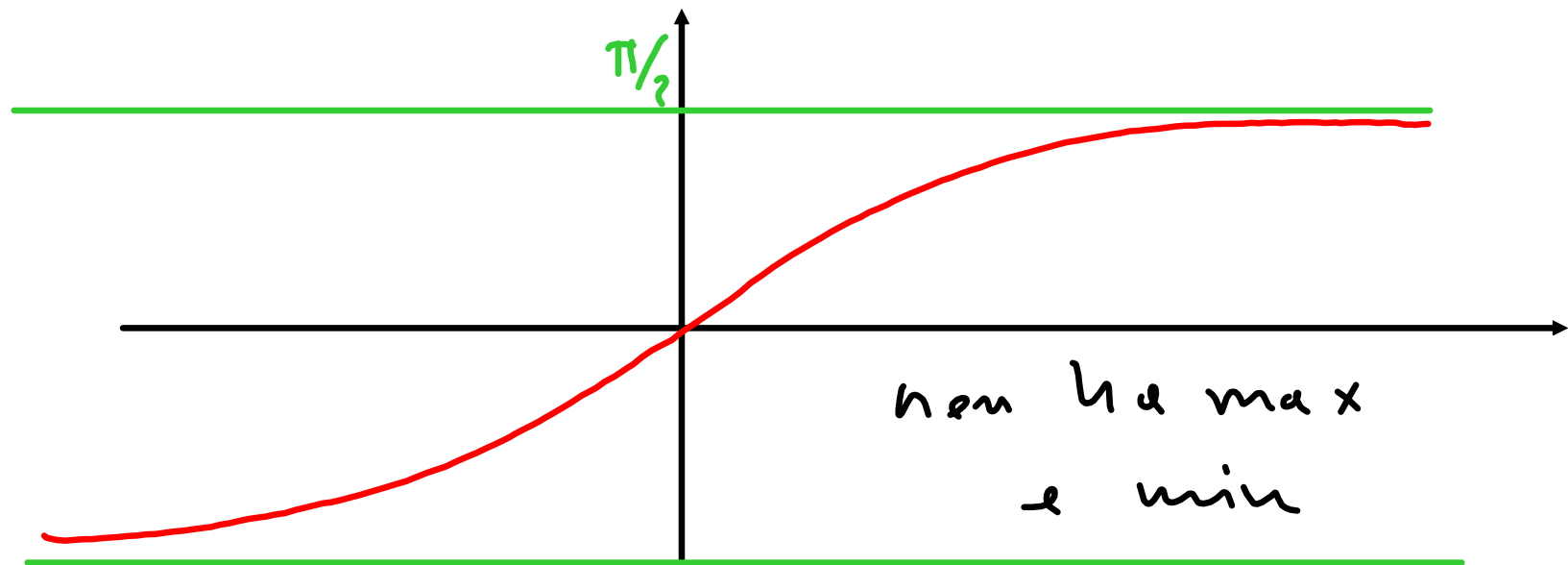
Perché mi serve un dominio
limitato e chiuso.



è continua
ma non ha
massimo

$$f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

Perché l'intervallo deve
essere limitato



$$f(x) = \arctan x \quad -\pi/2 \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Intorni

Def: Dato $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice intorno di x_0 un insieme del tipo

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

dove $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ che si dice raggio dell'intorno.

Un insieme del tipo

$[x_0, x_0 + \varepsilon)$ si dice
intervallo destro di x_0

$(x_0 - \varepsilon, x_0]$ intervallo
sinistro.

Def: Se $x_0 = +\infty$ un
intervallo di $+\infty$ è un
insieme del tipo

$$(a, +\infty) \quad \text{dove } a \in \mathbb{R}$$

semiretta ↗

intervallo di $-\infty$

$$(-\infty, a) \quad a \in \mathbb{R}$$

Def: Dato $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

l'insieme di tutti gli intornoi

di x_0 si indica con

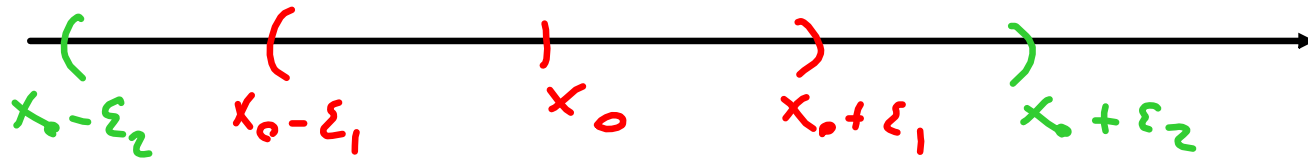
$$\mathcal{J}(x_0).$$

Oss: Dati U e $V \in \mathcal{J}(x_0)$

risulta che

$$U \cap V \in \mathcal{J}(x_0)$$

$$U \cup V \in \mathcal{J}(x_0).$$



$$U = (x_0 - \varepsilon_1, x_0 + \varepsilon_1)$$

$$V = (x_0 - \varepsilon_2, x_0 + \varepsilon_2)$$

$V \cap V$ ha il raggio uguale
al $\min \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2 \}$

$V \cup V$ ha il raggio uguale
al $\max \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2 \}$.

Lo stesso vale per le semirette
intorno di $\pm \infty$.

Def: Dato $A \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

x_0 si dice punto di accumulazione per A se

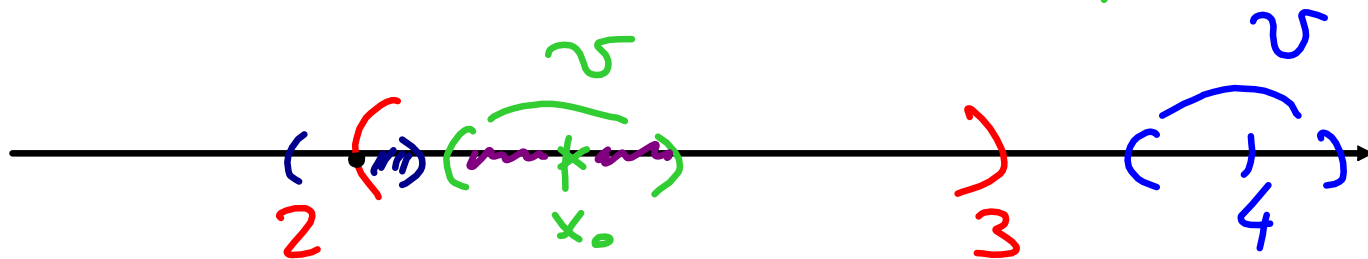
$\forall U \in \mathcal{I}(x_0)$ risulta

$$U \cap A \setminus \{x_0\} \neq \emptyset .$$

Vuol dire che vicino a x_0
ci sono altri punti di A
oltre a x_0 (x_0 potrebbe
anche non essere un punto
di A).

Es: $A = (2, 3)$.

$\text{Acc}(A) = \{ \text{punti di accumulazione di } A \}$. $\mathcal{U} \cap A = \emptyset$
 $\mathcal{U} \cap A \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$



$$(2,3) \subset \text{Acc}(A)$$

$$2 \in \text{Acc}(A) \quad ? \quad \text{si}$$

$$3 \in \text{Acc}(A)$$

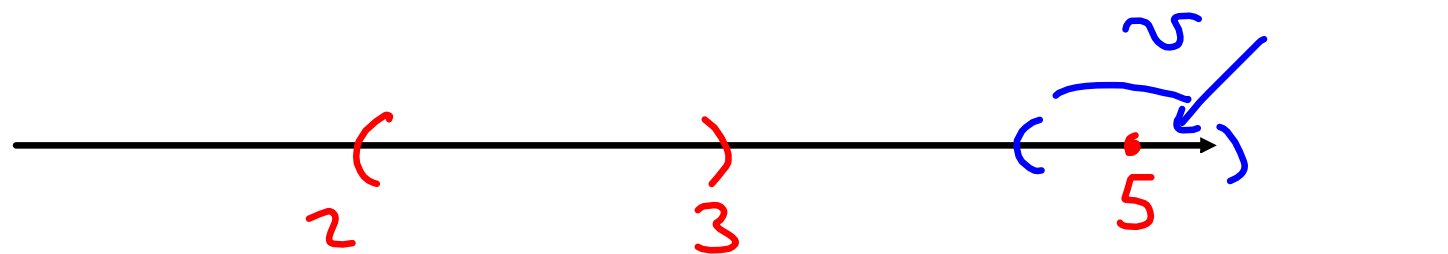
$$4 \in \text{Acc}(A) \quad ? \quad \text{no}$$

$$\text{Acc}(A) = [2,3]$$

$$B = [2, 3]$$

$$\text{Acc}(B) = [2, 3]$$

$$C = (2, 3) \cup \{5\}$$



$$\bigcup_n C = \{5\}, \bigcup_n C \setminus \{5\} = \emptyset$$

$$\underline{\text{Acc}(C) = [2, 3]}$$

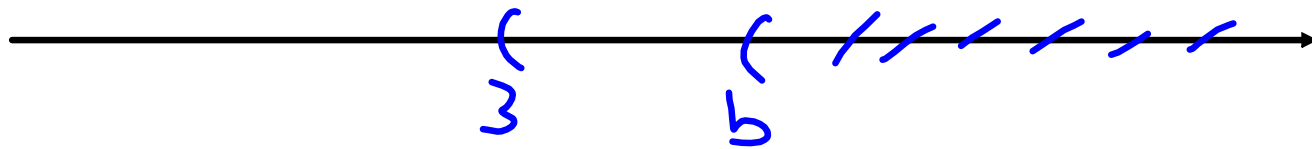
$$D = (3, +\infty)$$

$+\infty \in \text{Acc}(D)$?

$\mathcal{V} \in \mathcal{J}(\infty)$ qualsiasi

$$\mathcal{V} = (a, +\infty)$$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{R} \cap \mathbb{D} - \{\infty\} = \\
& = (a, +\infty) \cap (3, +\infty) - \{+\infty\} \\
& = (b, +\infty) \neq \emptyset \\
& \text{dove } b = \max\{a, 3\}
\end{aligned}$$

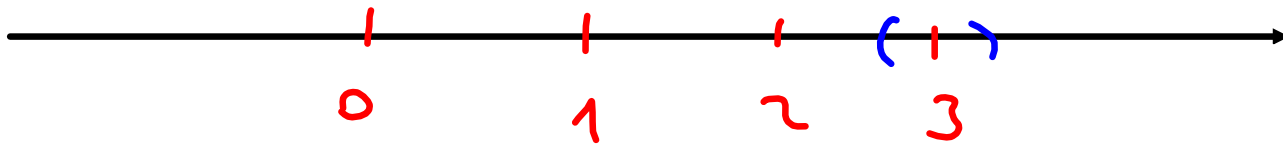


$$\text{Acc}(D) = [3, +\infty]$$

compreso $+\infty$.

$$E = \mathbb{N}$$

$$\text{Acc}(\mathbb{N}) = ?$$



ogni $n \in \mathbb{N} \notin \text{Acc}(\mathbb{N})$.

$+\infty \in \text{Acc}(\mathbb{N})$.

Verifichiamo

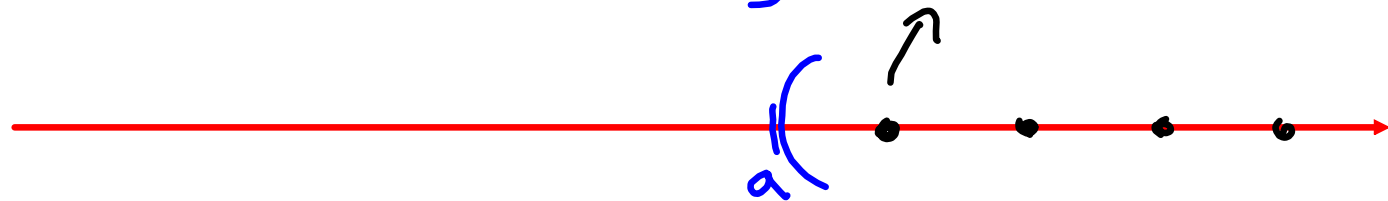
$\mathcal{U} \in \mathcal{T}(+\infty)$

$\mathcal{U} = (a, +\infty)$

$\mathcal{U} \cap \mathbb{N} \setminus \{+\infty\}$

$$= \left\{ n \in \mathbb{N} : n \geq [a] + 1 \right\} \neq \emptyset$$

$[a] + 1$



$$\text{Acc}(\mathbb{N}) = \{+\infty\}$$

$$\text{Acc}(\mathbb{Z}) = \{-\infty, +\infty\}$$

due elementi

Def: $A \subset \mathbb{R}$ $x_0 \in A$ si
dice punto interno ad A se
 $\exists \mathcal{V} \in \mathcal{T}(x_0)$ t.c. $\mathcal{V} \subset A$.

Es: $A = [3, 4]$ i punti
interni sono l'insieme $(3, 4)$.

I punti interni ad A si
indicano con $\text{int}(A)$.

Def: $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

$x_0 \in \text{Acc}(A)$. Si dice

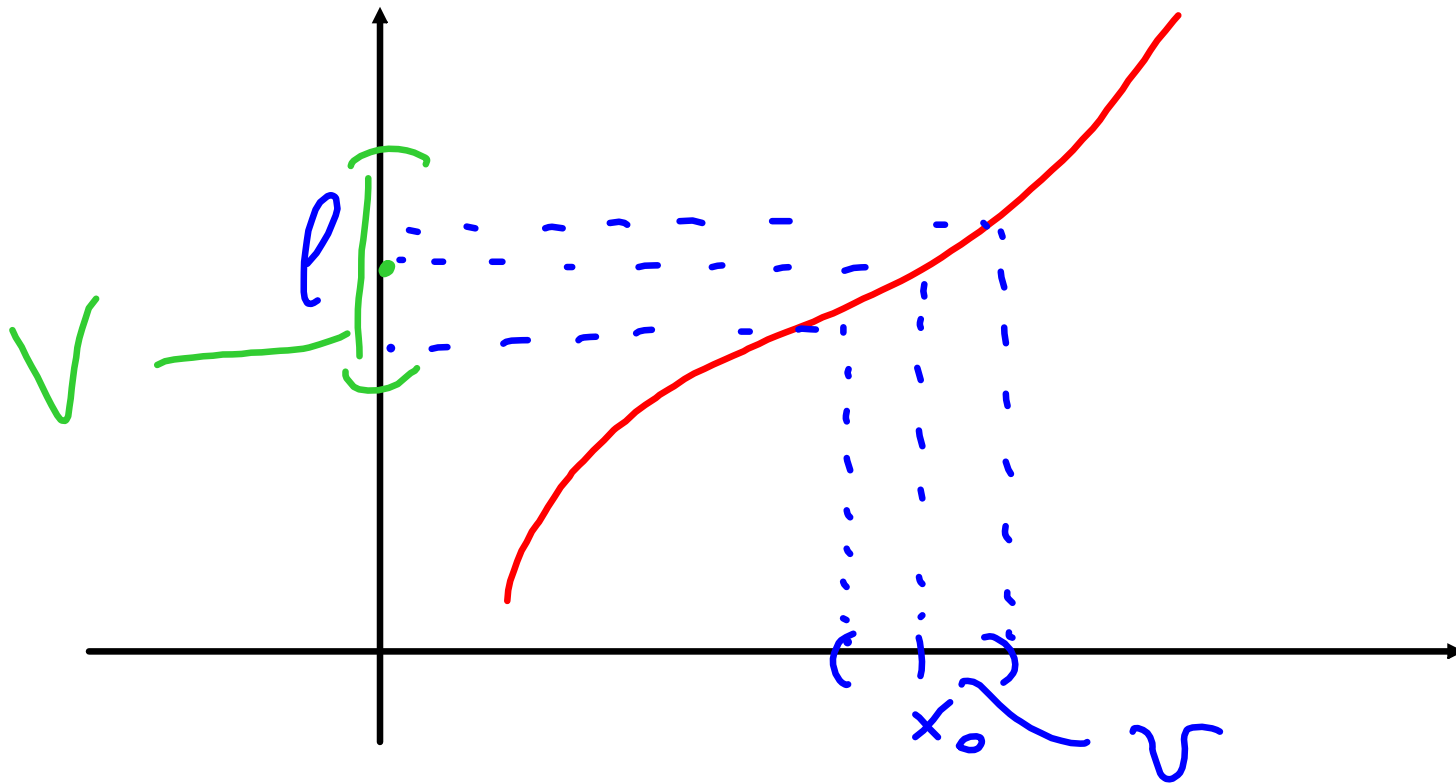
che $l \in \overline{\mathbb{R}}$ è il limite

di f per x che tende

a x_0 se $\forall \epsilon \in \mathcal{J}(l)$

$\exists \delta \in \mathcal{J}(x_0)$ t.c.

$x \in \mathcal{U} \cap A \setminus \{x_0\} \rightarrow$ non mi interessa
 $\Rightarrow f(x) \in V$ quanto vale
 f in x_0 .



Cosa vuol dire nel caso
 $x_0 \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{R}$.

$$\forall V \in \mathcal{J}(l)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad V = (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$$

$$\exists U \in \mathcal{J}(x_0)$$

$$\exists \delta > 0 \quad U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

$$x \in U \cap A \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V$$

$$|x - x_0| < \delta, x \in A, x \neq x_0$$

$$\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

continuità

$$|x - x_0| < \delta, x \in A$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Oss: f è continua
in x_0 se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

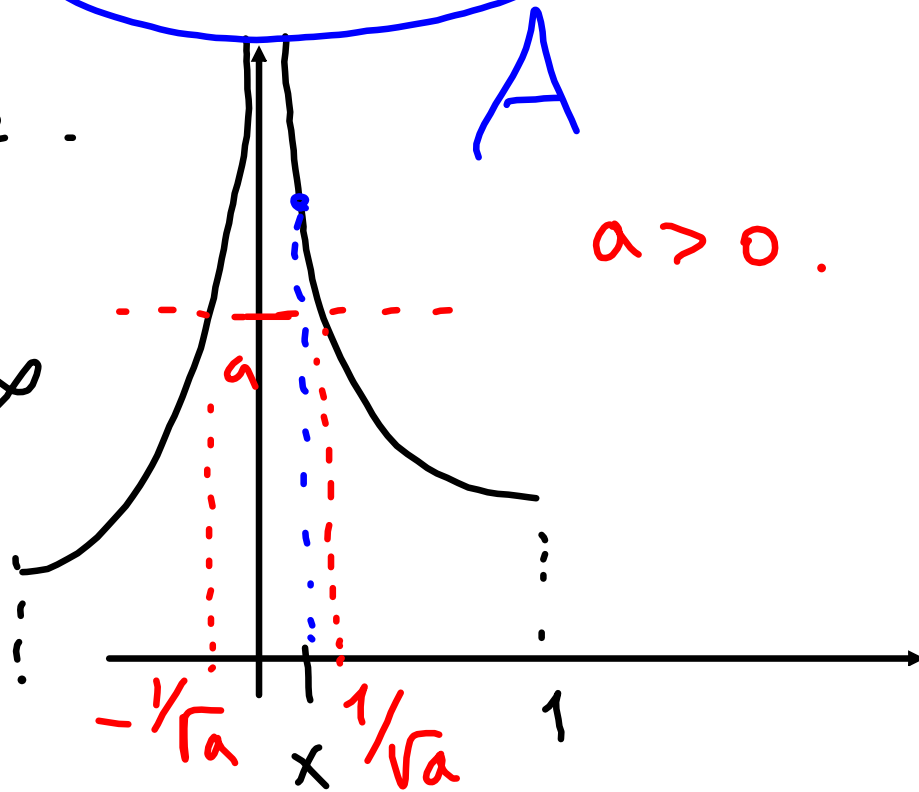
Oss: quando faccio il
limite non è detto che
 $x_0 \in A$, basta che
 $x_0 \in \text{Acc}(A)$.

Es: $f: \underbrace{[-1, 1] \setminus \{0\}}_A \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

verifiziamo



$$V \in \mathcal{T}(+\infty)$$

allora $V = (a, +\infty)$

supponiamo per ora $a > 0$.

Se prendo $U = \left(-\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$

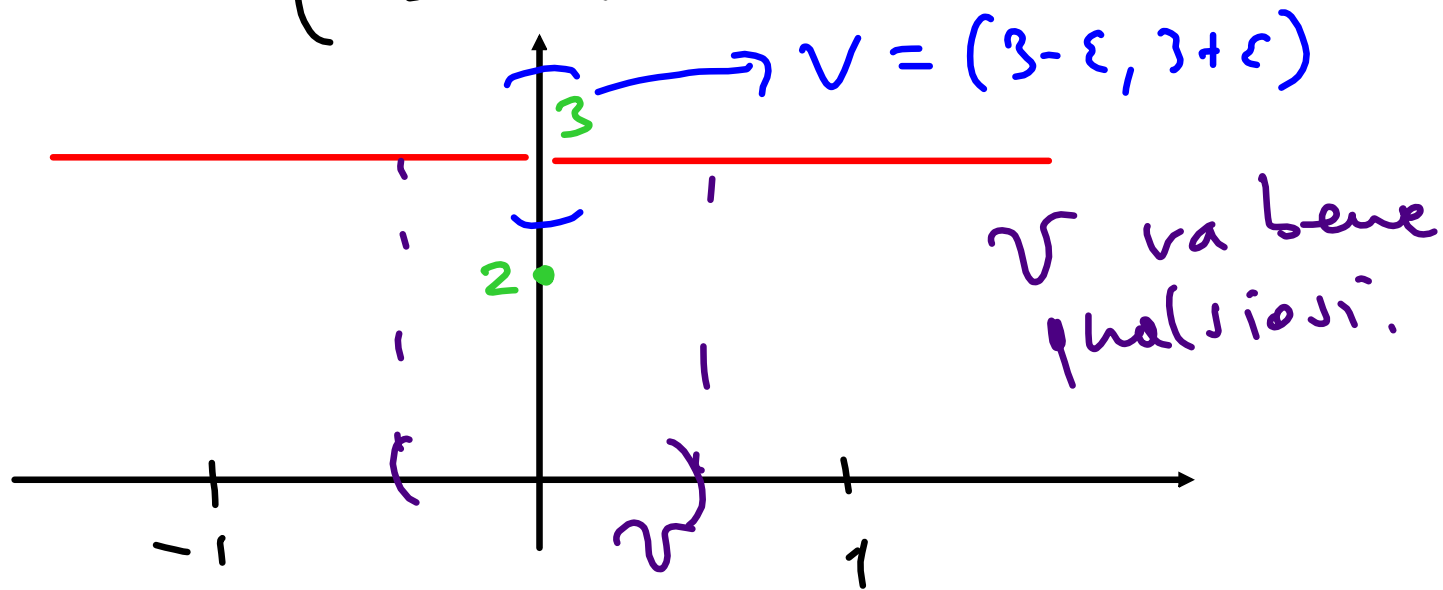
$$x \in U \cap A \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow f(x) > a \quad \text{cioè } f(x) \in V$$

$$A = [-1, 1]$$

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3.$$

perché $f(x) = 3$
 $\forall x \in \mathcal{U} \cap \{0\}$

f non è continua
in 0 perché

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3 \neq f(0) = 2$$

Def. $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \text{Acc}(A)$

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice che

$l \in \mathbb{R}$ è il limite

di f per x che tende a x_0

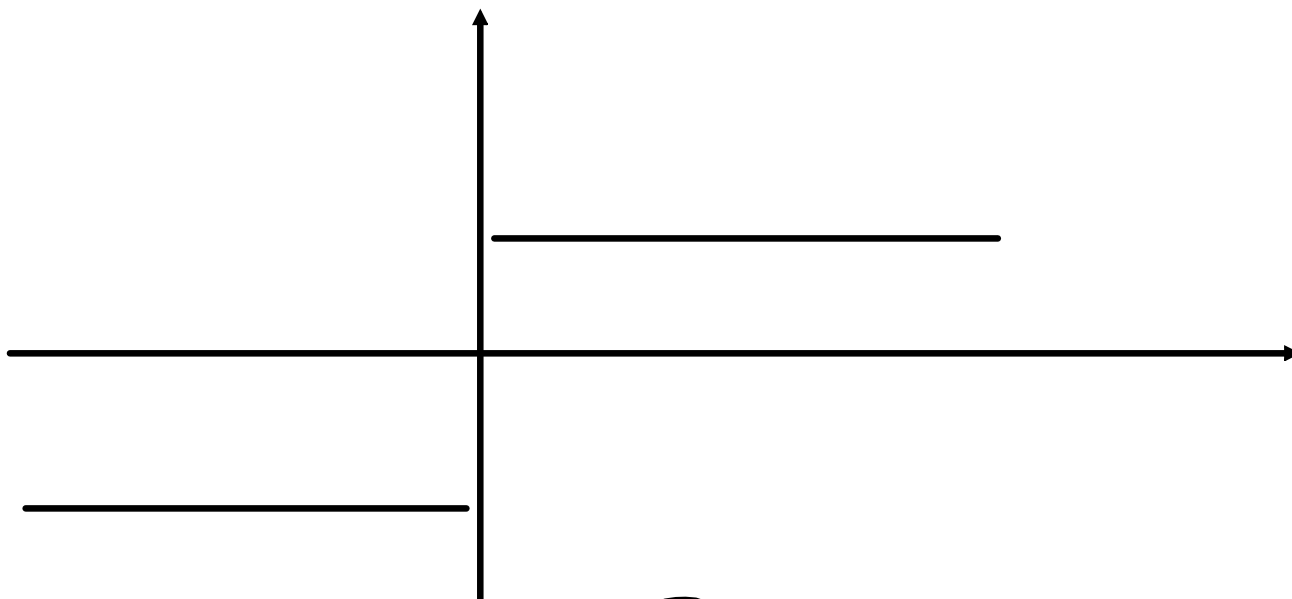
da destra e si scrive

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$$

Se $\forall V \in \mathcal{T}(X) \exists$
 U intorno destro di x_0

t.c.

$$x \in U \cap A \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V.$$



$$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{if } x < 0 \\ 1 & \text{if } x > 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$$

Teorema: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l \quad e$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l \quad .$$

Def: $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

$x_0 \in \text{Acc}(A)$. Si dice che

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l^+$, $l \in \mathbb{R}$

se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ e

$\exists \mathcal{V} \in \mathcal{I}(x_0)$ t.c.

$\forall x \in A \cap \mathcal{V} \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) > l$.

Es : $f(x) = \frac{1}{x}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$

